

Đánh giá hiệu quả phân tích dầm trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng tĩnh bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng mô hình nền Winkler, liên kết dị hướng và phần tử dầm-nền dị hướng

Efficiency evaluation of finite element analysis for beams on elastic foundations under static loads using the winkler model with anisotropic connections and beam-foundation interaction elements

> **THS ĐỖ XUÂN QUÝ**

Trường Đại học Giao thông vận tải
Email: quysbvl@utc.edu.vn

TÓM TẮT

Kết cấu dầm trên nền đàn hồi là kết cấu phổ biến trong xây dựng công trình, ví dụ như: Dầm móng đặt trên nền đàn hồi, hệ phao nổi trên mặt nước, hệ cọc trong đất, tà vẹt trên nền đá ballast... Cho đến nay, số lượng các nghiên cứu về loại kết cấu này rất phong phú, có cả theo hướng phân tích lý thuyết, phân tích số và hướng thí nghiệm. Mô hình tương tác giữa dầm và nền cũng rất đa dạng như: Mô hình nền tuyến tính Winkler với một hệ số nền, Filonenko-Borodich, Pasternak với hai hệ số nền...; mô hình nền phi tuyến dạng một chiều, dạng phi tuyến bậc cao. Trong nghiên cứu này, tác giả đồng thời sử dụng mô hình nền Winkler, mô hình liên kết dị hướng và phần tử dầm-nền dị hướng để phân tích một số bài toán điển hình để từ đó đưa ra các so sánh tương đối về hiệu quả của các mô hình trên.

Từ khóa: Dầm trên nền đàn hồi, đường sắt, phi tuyến, liên kết dị hướng, dầm-nền dị hướng.

ABSTRACT

Beam structures on elastic foundations are commonly

encountered in civil engineering applications, such as foundation beams resting on elastic soils, floating systems on water surfaces, pile systems in soil and railway sleepers on ballast layers. To date, there has been a wealth of research on this type of structure, encompassing theoretical analysis, numerical methods and experimental investigations. The models describing the interaction between the beam and the foundation are also diverse, including the linear Winkler foundation model with a single foundation modulus, the Filonenko-Borodich model and the Pasternak model with two foundation parameters. In addition, there exist nonlinear foundation models, such as one-dimensional nonlinear and higher-order nonlinear models. In this study, the author employs the Winkler foundation model, the anisotropic foundation connection model and anisotropic beam-foundation finite elements to analyze several representative problems. Based on these analyses, comparative evaluations of the effectiveness of the aforementioned models are presented.

Keywords: Beam on elastic foundation, railway, nonlinearity, anisotropic coupling, anisotropic beam-foundation system.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, các mô hình tính dầm trên nền đàn hồi rất phong phú và đa dạng. Tuy nhiên, trong tính toán thiết kế công trình hầu hết chưa xét đến sự không tiếp xúc giữa dầm và nền. Khi tính toán, các tác giả thường sử dụng các mô hình nền có một hệ số nền hoặc hai hệ số nền. Các công bố có thể kể đến như: Vũ Đình Lai và cộng sự [1], Lều Thọ Trình và cộng sự [2], Anil K. Chopra [3] giới thiệu phương pháp tính dầm trên nền đàn hồi theo mô hình theo Winkler có một hệ số nền; Vũ Thị Bích Quyên [4] tính dầm trên nền đàn hồi với mô hình nền Winkler bằng phương pháp phần tử biên; Phạm Hoàng Anh [5] tính dầm trên nền đàn hồi có điều kiện biên phức tạp với mô hình nền Winkler bằng phương pháp giải tích.

Để mô phỏng gần với ứng xử thực tế của dầm trên nền đàn hồi, các tác giả đã xem xét đến sự tiếp xúc và không tiếp xúc giữa dầm và nền: Z. Celep và các cộng sự [6] khảo sát tác dụng động của dầm dài hữu hạn trên nền một chiều; Diego Froio và các cộng sự [7], phân tích dầm trên nền phi tuyến, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; P. Castro Jorge và các cộng sự [8] nghiên cứu tác dụng của dầm hai đầu liên kết khớp trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của tải trọng không đổi di động với mô hình nền Winkler, nền một chiều và nền phi tuyến bậc 3; Cristiano Viei Rodrigues [9] phân tích dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của bộ dao động di động bằng phương pháp phần tử hữu hạn; D. Froio và các cộng sự [10] sử dụng phương pháp số tính dầm giản đơn trên nền phi tuyến bậc 3, dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian di động; S.M. Abdelghany và các cộng sự [11] khảo sát ứng xử của dầm trên nền phi tuyến, chịu tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp Galerkin và Runge-Kutta; Salih N Akour [12] phân tích động dầm trên nền phi tuyến chịu tác dụng của tải trọng điều hòa phân bố trên bề mặt dầm, sử dụng phương pháp Runge-Kutta để giải; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [13] nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động; Đỗ Xuân Quý và các cộng sự [14] nghiên cứu thực nghiệm ứng xử có liên kết dị hướng chịu tác dụng của tải trọng động; Đỗ Xuân Quý và cộng sự [16] phân tích tính dầm trên nền đàn hồi có kể đến sự không tiếp xúc giữa dầm và nền sử dụng phần tử dầm-nền dị hướng.

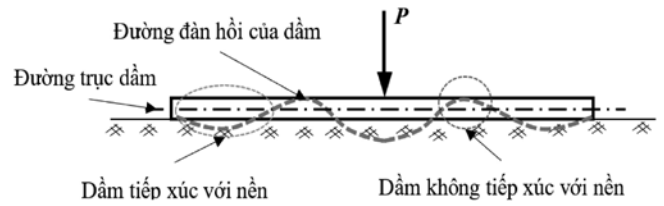
Trong bài báo này, nhóm tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích tính dầm trên nền đàn hồi với mô hình nền Winkler, mô hình liên kết dị hướng và phần tử dầm-nền dị hướng, từ đó đưa ra các đánh giá, so sánh về tính hiệu quả của ba mô hình nền này.

2. MÔ HÌNH TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

2.1. Tương tác giữa dầm và nền

Hình 1 là sơ đồ biến dạng của dầm trên nền đàn hồi khi chịu tác dụng của tải trọng tập trung P. Giữa dầm và nền có đoạn tiếp xúc và có đoạn không tiếp xúc với nhau. Thông thường, đoạn dầm và nền không tiếp xúc với nhau xuất hiện khi dầm có chiều dài lớn và có độ cứng nhỏ. Trong nghiên cứu này, tác giả sử dụng mô hình nền Winkler, mô hình liên kết dị hướng và mô hình dầm-nền dị hướng để mô tả sự tương tác giữa dầm và nền. Theo mô hình Winkler, dầm và nền luôn luôn tiếp xúc với nhau, phản lực của nền vào đáy dầm tỷ lệ thuận với chuyển vị của đáy dầm ở đó. Mô hình liên kết dị hướng và mô hình dầm-nền dị hướng, phản lực của nền vào đáy dầm cũng có tỷ lệ thuận với chuyển vị của dầm, trong đó có xét đến sự thay đổi độ cứng của

nền khi chiều của chuyển vị thay đổi. Công thức tính phản lực nền vào đáy dầm như sau:



Hình 1. Sơ đồ biến dạng của dầm trên nền đàn hồi

- Với mô hình nền Winkler [1]:

$$p = c \cdot w \tag{1}$$

Trong đó: p - Phản lực của nền; c - Độ cứng của nền; w - Độ võng của nền.

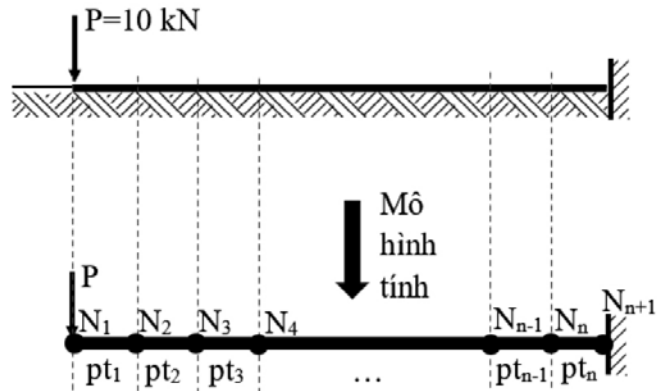
- Với mô hình nền dị hướng và dầm-nền dị hướng [13, 14, 16, 17]:

$$p = \frac{c_2 + c_1}{2} (w - w_0) + \frac{c_2 - c_1}{2} |w - w_0| \tag{2}$$

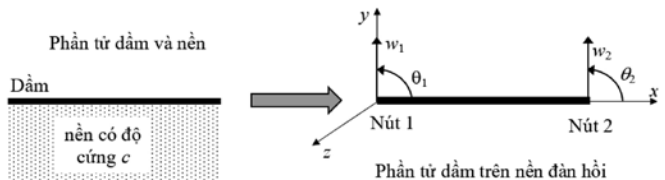
Trong đó: c_1, c_2 - Độ cứng của nền khi dầm có chuyển vị xuống dưới, lên trên; w_0 - Độ lệch chuẩn, mô tả nền bị ép trước hoặc giữa dầm và nền có khe hở. Với trường hợp dầm chịu lực như Hình 1, lấy $c_2 = 0, w_0 = 0$.

2.2. Mô hình tính

2.2.1. Theo mô hình Winkler



Hình 2. Mô hình tính dầm trên nền đàn hồi



Hình 3. Mô hình tính phần tử dầm trên nền đàn hồi

Để tính dầm trên nền đàn hồi bằng phương pháp phần tử hữu hạn với mô hình nền Winkler, dầm và nền được rời rạc hóa thành các phần tử dầm trên nền đàn hồi như Hình 2. Theo đó, dầm được chia thành n phần tử, tương ứng nền cũng được chia thành n phần. Gộp phần tử dầm với nền phía dưới thành phần tử dầm trên nền đàn hồi [15] (Hình 3).

Phần tử dầm trên nền đàn hồi [15] có ma trận độ cứng:

$$[k] = [k_1] + [k_2] \tag{3}$$

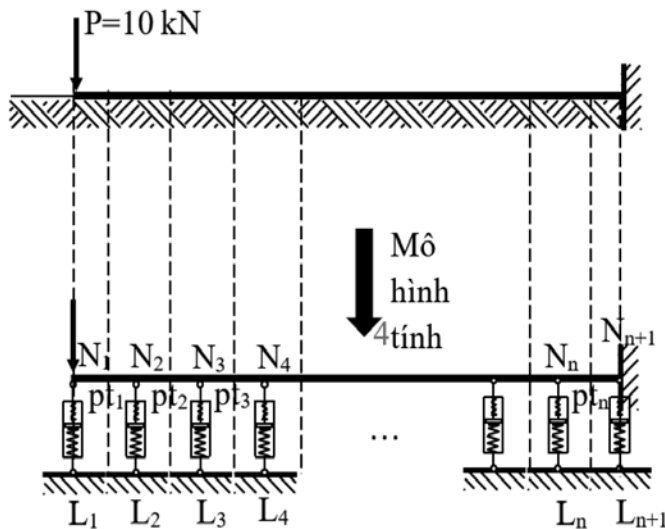
$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{a^3} & \frac{6EJ}{a^2} & -\frac{12EJ}{a^3} & \frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{6EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{a} & -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{2EJ}{a} \\ \frac{12EJ}{a^3} & \frac{6EJ}{a^2} & \frac{12EJ}{a^3} & -\frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{6EJ}{a^2} & \frac{2EJ}{a} & -\frac{6EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{a} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}ca & -\frac{11}{210}ca^2 & \frac{9}{70}ca & \frac{13}{420}ca^2 \\ \frac{11}{210}ca^2 & \frac{1}{105}ca^3 & -\frac{13}{420}ca^2 & -\frac{1}{140}ca^3 \\ \frac{9}{70}ca & -\frac{13}{420}ca^2 & \frac{13}{35}ca & \frac{11}{210}ca^2 \\ \frac{13}{420}ca^2 & -\frac{1}{140}ca^3 & \frac{11}{210}ca^2 & \frac{1}{105}ca^3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Trong đó: $[k]$, $[k_1]$, $[k_2]$ - Ma trận độ cứng của phần tử dầm trên nền đàn hồi, phần tử dầm, phần tử nền dưới dầm; c - Độ cứng của nền; a - Chiều dài phần tử; E - Mô-đun đàn hồi vật liệu dầm; J - Mô-men quán tính chống uốn của mặt cắt ngang dầm; F - Diện tích mặt cắt ngang dầm.

2.2.2. Theo mô hình liên kết dị hướng

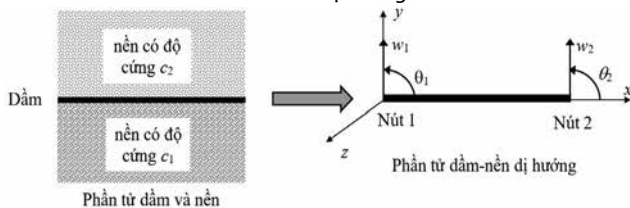
Với mô hình liên kết dị hướng, dầm được chia thành n phần tử có nút đầu N_i và nút cuối N_{i+1} . Nền được chia thành $n+1$ phần tử được mô hình bằng một liên kết dị hướng đặt tại các nút của các phần tử dầm. Mỗi phần tử nền nhận các nút dầm làm trung tâm, mở rộng sang hai bên trái phải đến giữa các phần tử dầm lân cận. Riêng ở đầu dầm, phần tử nền đó kéo dài từ đầu dầm đến giữa phần tử dầm lân cận về phía trong của dầm (Hình 4).



Hình 4. Mô hình tính dầm trên nền đàn hồi với hệ liên kết dị hướng

Phản lực của liên kết dị hướng được tính bằng công thức (2). Phần tử dầm có ma trận độ cứng được tính như công thức (4).

2.2.3. Theo mô hình dầm-nền dị hướng



Hình 5. Mô hình phần tử dầm-nền dị hướng

Theo mô hình này, dầm và nền cũng được rời rạc thành n phần tử dầm-nền dị hướng tương tự như trường hợp tính theo mô hình nền Winkler (Hình 2). Mỗi hệ gồm dầm và nền trong phạm vi của nó được mô hình hóa thành một phần tử dầm-nền dị hướng (Hình 5).

Tương tác của nền vào đáy dầm được tính theo công thức (2). Ma trận độ cứng của phần tử dầm-nền dị hướng được tính theo công thức (6) [16].

$$[k]=[k_1]+[k_2] \quad (6)$$

Trong đó: $[k]$, $[k_1]$, $[k_2]$ - Ma trận độ cứng của phần tử dầm-nền dị hướng, phần tử dầm, phần tử nền dưới dầm. Ma trận độ cứng của phần tử dầm được tính như công thức (4). Ma trận độ cứng của phần tử nền được tính theo công thức (7).

$$[k_2] = \begin{bmatrix} TP_{11} & TP_{12} & TP_{13} & TP_{14} \\ TP_{12} & TP_{22} & TP_{23} & TP_{24} \\ TP_{13} & TP_{23} & TP_{33} & TP_{34} \\ TP_{14} & TP_{24} & TP_{34} & TP_{44} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Với hàm dạng của phần tử dầm là hàm bậc 3. Theo [16], phần tử dầm-nền dị hướng có 4 loại: Loại 1 - Đường đàn hồi dầm không cắt đường chuẩn w_0 ; Loại 2 - Đường đàn hồi dầm cắt đường chuẩn w_0 tại một điểm; Loại 3 - Đường đàn hồi dầm cắt đường chuẩn w_0 tại 2 điểm; Loại 4 - Đường đàn hồi dầm cắt đường chuẩn w_0 tại ba điểm. Mỗi loại phần tử dầm-nền dị hướng lập được công thức tính ma trận độ cứng nền $[k_2]$ riêng (chi tiết có phụ lục).

3. TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

3.1. Theo mô hình Winkler

Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn được viết như sau:

$$[K]\{\Delta\}=\{P\} \quad (8)$$

Trong đó: $[K]$ - Ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, $\{\Delta\}$ - Vector chuyển vị của dầm, $\{P\}$ - Vector tải trọng. Ma trận độ cứng $[K]$ của kết cấu được xây dựng trên cơ sở ma trận độ cứng của các phần tử dầm trên nền đàn hồi như công thức (3).

Hệ phương trình tuyến tính (8) được giải bằng phương pháp khử Gauss. Nghiệm của phương trình là chuyển vị của các nút phần tử dầm, từ đó tính ra nội lực và chuyển vị các điểm còn lại trên dầm.

3.2. Theo mô hình liên kết dị hướng

Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn được viết [17]:

$$[K]\{\Delta\}+\{N(\Delta)\}=\{P\} \quad (9)$$

Trong đó: $[K]$ - Ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, được xây dựng trên cơ sở ma trận độ cứng các phần tử dầm (4); $\{N(\Delta)\}$ - Vector phản lực liên kết, được thành lập trên cơ sở công thức tính phản lực liên kết (2).

Do $\{N(\Delta)\}$ là hàm phi tuyến nên hệ phương trình (9) là hệ phi tuyến. Tác giả sử dụng phương pháp lặp Newton để giải bài toán này. Trình tự giải hệ (9) như sau:

Bước 1. Cho vector chuyển vị nút một giá trị ban đầu $\Delta_i = \Delta_i^0$.

Bước 2. Giải hệ phương trình lặp, tìm số gia của chuyển vị nút dDI theo phương pháp Newton. Tính lại giá trị vector chuyển vị nút: $D_i^1 = D_i^0 + dD_i$.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện hội tụ. Nếu thỏa mãn, dừng chương trình. Nếu không thỏa mãn, quay lại Bước 1.

3.3. Theo mô hình dầm-nền dị hướng

Phương trình cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn được viết như sau:

$$[K]\{\Delta\}=\{P\} \quad (10)$$

Trong đó: $[K]$ - Ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu, được xây dựng trên cơ sở ma trận độ cứng của các phần tử dầm - nền dị hướng (6).

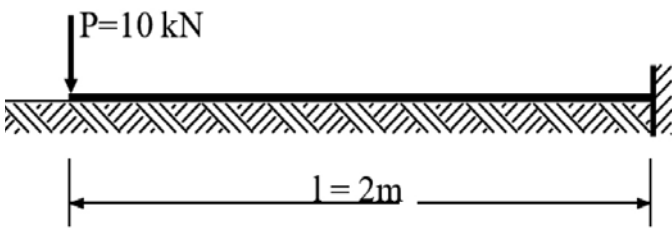
Do trong (6) có chứa $[k_2]$, mà $[k_2]$ chỉ xác định được rõ ràng khi biết chính xác được đường đàn hồi của phần tử dầm tương ứng nên $[K]$ không thể tính ngay được, hay hệ phương trình (10) là hệ phương trình phi tuyến. Để giải hệ phương trình (10), tác giả sử dụng phương pháp lặp Newton, trình tự giải được thực hiện như sau:

Trình tự giải phương trình (10):

- Bước 1. Cho vector chuyển vị $\{\Delta\} = 0$, lập vector tải trọng $\{P\}$, lập ma trận độ cứng của phần tử dầm $[k_1]$.
- Bước 2. Suy ra thông số đầu các phần tử, xác lập đường đàn hồi của các phần tử, lập ma trận độ cứng của nền tương ứng $[k_2]$, lập ma trận độ cứng của phần tử dầm-nền dị hướng tương ứng, lập ma trận độ cứng kết cấu. Giải phương trình (10) được vector chuyển vị $\{\Delta\}$.
- Bước 3. Kiểm tra điều kiện dừng lặp: Nếu thỏa mãn thì dừng tính toán, nếu không thỏa mãn thì cho vector chuyển vị mới theo phương pháp giải lặp Newton và quay lại Bước 1.

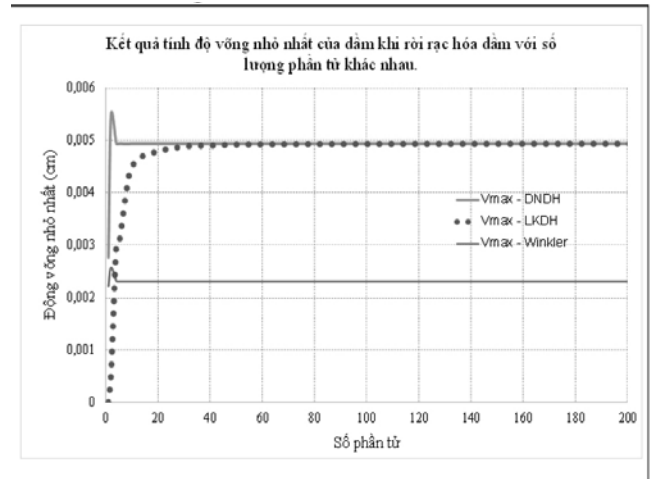
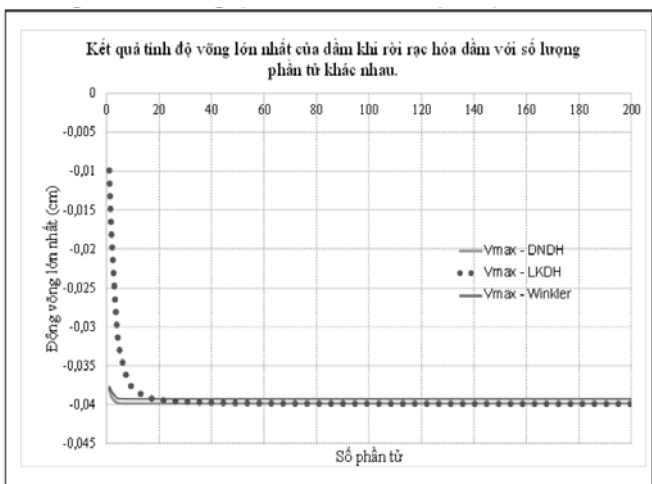
4. ĐÁNH GIÁ HIỆU QUẢ PHÂN TÍCH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG TÍNH

* Đặt bài toán:



Hình 6. Dầm công-xon trên nền đàn hồi

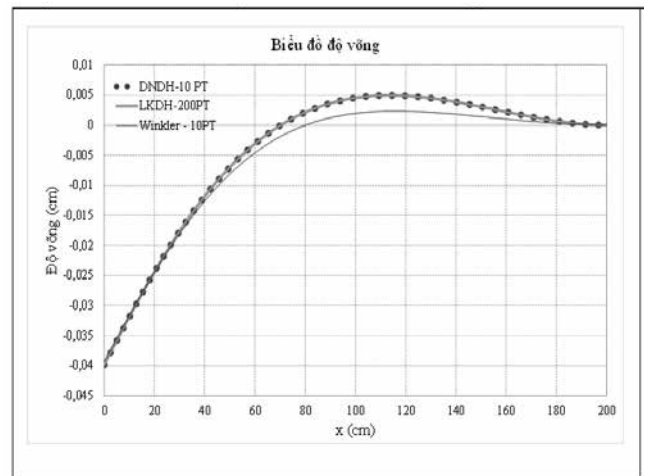
Một dầm công-xon chịu lực như Hình 6. Mặt cắt ngang dầm có $J = 833 \text{ cm}^4$, $F = 100 \text{ cm}^2$. Vật liệu có $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$. Nền có $c_1 = 10 \text{ kN/cm}^2$, $c_2 = 0$, $w_0 = 0$. Phân tích độ võng của dầm theo các mô hình Winkler, liên kết dị hướng và dầm-nền dị hướng. Mô hình phần tử dầm-nền dị hướng



Hình 7. Độ võng lớn nhất, nhỏ nhất của dầm hội tụ khi số lượng phần tử đủ lớn *Lời giải:

Với từng mô hình, dầm được rời rạc hóa thành số lượng phần tử tăng dần. Phân tích cho thấy kết quả phân tích theo cả ba mô hình đều hội tụ dần khi số lượng phần tử tăng dần (Hình 7). Kết quả phân tích cuối cùng sẽ là kết quả phân tích ứng với số lượng phần tử đủ lớn để khi tăng số lượng phần tử kết quả phân tích đo vẫn không đổi.

Hình 8 là kết quả phân tích dầm ở ba mô hình với cùng độ hội tụ giống nhau. Kết quả cho thấy, để đạt được mức độ hội tụ khoảng 0,01% về độ võng lớn nhất thì mô hình dầm-nền dị hướng và mô hình Winkler chỉ cần chia dầm thành 10 phần tử, trong khi đó mô hình liên kết dị hướng cần đến 200 phần tử. Điều này là kết quả của việc cả hai mô hình dầm-nền dị hướng và Winkler đều thực hiện xây dựng các "siêu" phần tử gồm cả dầm và nền, cùng giả định hàm dạng là bậc 3. Trong khi đó, mô hình liên kết dị hướng lại gần đúng nền thành hệ các liên kết dị hướng nên nó cần phải có số lượng lớn hơn mới có thể cho kết quả hội tụ được.



Độ võng	Winkler (10PT)	LKDH (200PT)	DNDH (10PT)
Lớn nhất (cm)	0,0393	0,0399	0,0399
Sai số (%)	0,0096	0,0101	0,0093
Nhỏ nhất (cm)	-0,0023	-0,0049	-0,0049
Sai số (%)	0,0048	0,0189	0,0033

Hình 8. Kết quả phân tích dầm với các mô hình khác nhau ở cùng mức độ hội tụ

Tuy nhiên, cũng theo Hình 8 cho thấy, kết quả phân tích theo mô hình dầm-nền dệ hướng và mô hình liên kết dệ hướng rất sát nhau, khác so với mô hình Winkler (1,504% về độ võng lớn nhất và 53,0610% về độ võng nhỏ nhất). Nguyên nhân có sự khác biệt này là do trong dầm có xuất hiện một đoạn chuyển vị lên trên, lúc này mô hình Winkler không thể mô tả được sự tách ra giữa dầm và nền, hai mô hình kia mô tả bằng hệ số nền $c_2 = 0$. Hay có thể nói rằng: Với trường hợp này, mô hình dầm-nền dệ hướng và mô hình liên kết dệ hướng cho kết quả phân tích sát với ứng xử của thực tế của dầm hơn.

Thông qua khảo sát này cho thấy, tốc độ hội tụ của mô hình Winkler và mô hình dầm nền-dệ hướng là nhanh nhất, nhưng tổng thời gian tính toán của mô hình Winkler sẽ ngắn nhất do không phải giải lặp. Mô hình liên kết dệ hướng cho tốc độ hội tụ chậm nhất nhưng xu thế hội tụ ổn định (Hình 7), không có sự tịnh tiến “quá” như hai mô hình kia, nên có thể sẽ cho tốc độ hội tụ tốt hơn ở những bài toán phức tạp. Mô hình Winkler chỉ phù hợp để phân tích các trường hợp dầm tiếp xúc hoàn toàn với nền, còn với trường hợp dầm không tiếp xúc hoàn toàn với nền thì nên sử dụng mô hình liên kết dệ hướng hoặc dầm-nền dệ hướng.

5. KẾT LUẬN

Tác giả đã tổng hợp, có các phân tích về việc sử dụng mô hình Winkler, dầm-nền dệ hướng và liên kết dệ hướng trong tính toán dầm trên nền đàn hồi.

Phân tích cho thấy: Tốc độ hội tụ, thời gian giải theo mô hình Winkler là ngắn nhất nhưng chỉ nên áp dụng với trường hợp dầm tiếp xúc hoàn toàn với nền. Mô hình dầm-nền dệ hướng và liên kết dệ hướng cho phép áp dụng với cả trường hợp dầm không tiếp xúc hoàn toàn với nền. Nhìn chung, tốc độ hội tụ của mô hình dầm-nền dệ hướng nhanh hơn so với liên kết dệ hướng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Vũ Đình Lai (2010), Sức bền vật liệu, tái bản 3, NXB. GTVT.
- [2]. Lê Thọ Trình và Đỗ Văn Bình (2002), Ổn định công trình, lần 1, NXB. Khoa học và Kỹ thuật.
- [3]. Anil K. Chopra (2012), Dynamics of structures, fourth ed, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, America.
- [4]. Vũ Thị Bích Quyên và cộng sự (2017), Phương pháp phần tử biên tính nội lực và chuyển vị hệ dầm trên nền đàn hồi theo mô hình Winkler, Tạp chí KHCN Xây dựng, 6-12, http://ibst.vn/upload/documents/file_upload/1512721967Vu-Thi-Bich-Quyên.pdf.
- [5]. Phạm Hoàng Anh (2014), Nghiệm giải tích rời rạc cho bài toán dầm trên nền đàn hồi Winkler, tập 2, Kỷ yếu Hội nghị Cơ học toàn quốc, Hà Nội, tr.7-12.
- [6]. Z. Celep, K. Güler, F. Demir (2011), Response of a completely free beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to dynamic load, Structural Engineering and Mechanics, 37, 61-77, <http://techno-press.org/samplejournal/pdf/sem3701004.pdf>.
- [7]. Diego Froio, Egidio Rizzi, Fernando M.F. Simões, A. Pinto da Costa (2017), Critical velocities of a beam on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, Procedia Engineering, 199, 2585-2590, <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.348>.
- [8]. P. Castro Jorge, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa (2014), Finite element dynamic analysis of beams on non-uniform nonlinear viscoelastic foundations under moving loads, Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN, Portugal, pp.841-845.
- [9]. C. Rodrigues, F.M.F. Simões, A. Pinto da Costa, D. Froio, E. Rizzi (2018), Finite element dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundations under a moving

oscillator, European Journal of Mechanics - A/Solids, 68, 9-24, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.10.005>.

[10]. D. Froio, R. Muioli, E. Rizzi (2016), Numerical dynamic analysis of beams on nonlinear elastic foundation under harmonic moving load, ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Greece, pp.4794-4809, <https://doi.org/10.7712/100016.2149.7515>.

[11]. S. M. Abdelghany, K.M. Ewis, A.A. Mahmoud, M.M. Nassar (2015), Dynamic response of non-uniform beam subjected to moving load and resting on non-linear viscoelastic foundation, Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences, 4, 192-199, <https://dx.doi.org/10.1016/j.bjbas.2015.05.007>.

[12]. Salih N Akour (2010), Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation, Proceedings of the World Congress on Engineering, London, U.K.

[13]. Đỗ Xuân Quý, Lương Xuân Bình, Hà Văn Quân, Hoàng Văn Tuấn (2018), Nghiên cứu ứng xử cơ học của thanh có liên kết dệ hướng chịu tác dụng của tải trọng động, Tuyển tập công trình khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XIV, TP Hồ Chí Minh, tr.549-556.

[14]. Do Xuan Quy, Ta Thi Hien, Luong Xuan Binh, Hoang Van Tuan and Le Thanh Tam (2019), Experimental research on dynamic response of beams with anisotropic restraints, The 5th international Conference on Engineering Mechanics and Automation, Ha Noi, pp.98-104.

[15]. Nguyễn Xuân Lưu, Phương pháp phần tử hữu hạn (2007), NXB. GTVT, Hà Nội.

[16]. Đỗ Xuân Quý, Vũ Thị Nga (6/2021), Phân tích tĩnh dầm trên nền đàn hồi có kể đến sự không tiếp xúc giữa dầm và nền sử dụng phần tử dầm-nền dệ hướng, Tạp chí Khoa học GTVT, tập 72, số 5, 552-564.

[17]. Lương Xuân Bình, Đỗ Xuân Quý, Nguyễn Xuân Lưu (2007), Tính toán kết cấu có liên kết dệ hướng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 8, tập 2, tr.57-68.