

# Phân tích ổn định phi tuyến của hệ khung phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

## Nonlinear stability analysis of plane frame systems using the finite element method

> PGS.TS TRẦN THỊ THÚY VÂN\*, TS ĐÀO NGỌC KHOA

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

\*Email: vanttt@hau.edu.vn

### TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu ứng xử ổn định của hệ khung phẳng chịu nén bằng phương pháp phần tử hữu hạn, với trọng tâm là ảnh hưởng của phi tuyến hình học đến khả năng chịu lực của kết cấu. Trong khi phân tích ổn định tuyến tính (eigenvalue buckling) cho phép xác định tải trọng tới hạn một cách nhanh chóng, phương pháp này thường đánh giá cao khả năng chịu tải của kết cấu do bỏ qua sự thay đổi hình học trong quá trình biến dạng. Do đó, một mô hình phân tích phi tuyến được xây dựng trong môi trường ANSYS APDL nhằm mô phỏng chính xác đường cân bằng của hệ kết cấu. Một khung phẳng hai tầng hai nhịp được lựa chọn làm bài toán nghiên cứu điển hình. Kết quả cho thấy sự khác biệt đáng kể giữa tải trọng tới hạn thu được từ phân tích tuyến tính và phi tuyến. Ngoài ra, ảnh hưởng của biến dạng ban đầu đến ứng xử ổn định cũng được xem xét, cho thấy khả năng làm giảm đáng kể tải trọng tới hạn của kết cấu. Nghiên cứu khẳng định sự cần thiết của phân tích phi tuyến trong thiết kế kết cấu thực tế.

**Từ khóa:** Ổn định phi tuyến; hệ khung phẳng; phương pháp phần tử hữu hạn; phân tích ổn định; phi tuyến hình học; tải trọng tới hạn; ANSYS APDL

### ABSTRACT

This study investigates the nonlinear stability behavior of planar frame structures using the finite element method, with emphasis on the influence of geometric nonlinearity on structural response. Linear eigenvalue buckling analysis is commonly used to estimate the critical load; however, it neglects the effect of deformation on the structural configuration and may overestimate the load-carrying capacity. To address this limitation, a nonlinear analysis framework is developed in the ANSYS APDL environment to capture the full equilibrium path of the structure. A two-story, two-span planar frame is considered as a representative example. The results show a noticeable difference between critical loads obtained from linear and nonlinear analyses, highlighting the importance of considering geometric nonlinearity. The load-displacement relationship further reveals the reduction of structural stiffness and the occurrence of instability beyond a limit point. The findings demonstrate that nonlinear analysis provides a more realistic prediction of structural behavior and is essential for reliable stability assessment of slender frame systems.

**Keywords:** Nonlinear stability; planar frame structures; finite element method; buckling analysis; geometric nonlinearity; critical load; ANSYS APDL

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ổn định kết cấu là một trong những vấn đề cơ bản và quan trọng trong cơ học công trình, đặc biệt đối với các hệ kết cấu dạng thanh và khung chịu nén. Trong nhiều trường hợp, kết cấu có thể mất khả năng chịu lực do hiện tượng mất ổn định trước khi ứng suất trong vật liệu đạt đến giới hạn bền. Lý thuyết ổn định đàn hồi cổ điển đã được phát triển và hệ thống hóa trong nhiều công trình nền tảng trong cơ học công trình [1]. Đối với các hệ kết cấu thực tế như khung phẳng, khung không gian hoặc hệ thanh mảnh, ứng xử ổn định chịu ảnh hưởng mạnh bởi hình học kết cấu, điều kiện biên, tải trọng tác dụng cũng như tương tác giữa lực dọc và chuyển vị ngang.

Trong thực hành kỹ thuật, các phương pháp giải tích cổ điển thường gặp nhiều hạn chế khi áp dụng cho các hệ kết cấu có hình

học và điều kiện liên kết phức tạp [1]. Do đó, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM) đã trở thành công cụ hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong phân tích kết cấu hiện đại [2–4]. Các nghiên cứu về FEM cho thấy phương pháp này cho phép mô hình hóa chi tiết ứng xử của kết cấu, đồng thời xử lý hiệu quả các bài toán ổn định và phi tuyến có mức độ phức tạp cao [5–8].

Phân tích ổn định tuyến tính dựa trên bài toán trị riêng vẫn được sử dụng phổ biến để xác định tải trọng tới hạn và dạng mất ổn định của kết cấu [3]. Tuy nhiên, phương pháp này được xây dựng trên giả thiết biến dạng nhỏ và không xét đến sự thay đổi hình học trong quá trình chịu tải. Vì vậy, kết quả thu được thường phản ánh trạng thái ổn định lý tưởng và có xu hướng đánh giá cao khả năng chịu lực thực tế của hệ kết cấu [4,5]. Đối với các hệ khung mảnh, ảnh hưởng của phi tuyến hình học và hiệu ứng P- $\Delta$  có thể làm suy giảm

đáng kể độ cứng tổng thể, từ đó làm giảm tải trọng tới hạn của kết cấu [6].

Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào phân tích phi tuyến và ứng xử sau mất ổn định của các hệ kết cấu dạng khung và vòm bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Shaikat và cộng sự [9] đã nghiên cứu ứng xử post-buckling của kết cấu vòm bằng phương pháp arc-length kết hợp với công thức phần tử phi tuyến. Goriely và cộng sự [10] đã chỉ ra rằng ảnh hưởng của phi tuyến hình học có vai trò quan trọng trong ứng xử mất ổn định của các cấu kiện mảnh. Santos và cộng sự [11] đã thực hiện phân tích phi tuyến của hệ khung phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn vị trí, cho thấy khả năng mô phỏng hiệu quả ứng xử phi tuyến của hệ kết cấu. Ngoài ra, Thai và cộng sự [12] đã đề xuất phần tử dầm đơn giản phục vụ phân tích phi tuyến hình học của hệ khung không gian, góp phần nâng cao hiệu quả và độ ổn định của quá trình tính toán số.

Mặc dù đã có nhiều nghiên cứu liên quan đến phân tích phi tuyến của hệ kết cấu, việc đánh giá định lượng sự khác biệt giữa phân tích ổn định tuyến tính và phân tích phi tuyến hình học đối với hệ khung phẳng vẫn chưa được làm rõ đầy đủ trong nhiều nghiên cứu ứng dụng. Bên cạnh đó, việc mô phỏng quá trình chuyển tiếp từ trạng thái làm việc ổn định đến trạng thái sau mất ổn định của hệ khung thông qua đường cân bằng tải trọng - chuyển vị vẫn là vấn đề có ý nghĩa thực tiễn trong phân tích và thiết kế kết cấu.

Do đó, bài báo này tập trung nghiên cứu ứng xử ổn định phi tuyến của hệ khung phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Mô hình tính toán được xây dựng trong môi trường ANSYS APDL và áp dụng cho bài toán khung phẳng hai tầng hai nhịp. Nghiên cứu thực hiện đồng thời phân tích ổn định tuyến tính và phân tích phi tuyến hình học nhằm đánh giá ảnh hưởng của hiệu ứng  $P-\Delta$  và sự thay đổi hình học đến tải trọng tới hạn cũng như ứng xử của kết cấu. Đường cân bằng tải trọng - chuyển vị ( $P-\Delta$ ) được sử dụng để mô tả quá trình làm việc của hệ từ giai đoạn đàn hồi ban đầu đến trạng thái sau mất ổn định. Kết quả nghiên cứu góp phần làm rõ vai trò của phân tích phi tuyến trong đánh giá an toàn ổn định của các hệ khung mảnh, đồng thời cung cấp cơ sở tham khảo cho việc ứng dụng ANSYS APDL trong các bài toán ổn định kết cấu thực tế.

## 2. MÔ TẢ BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN

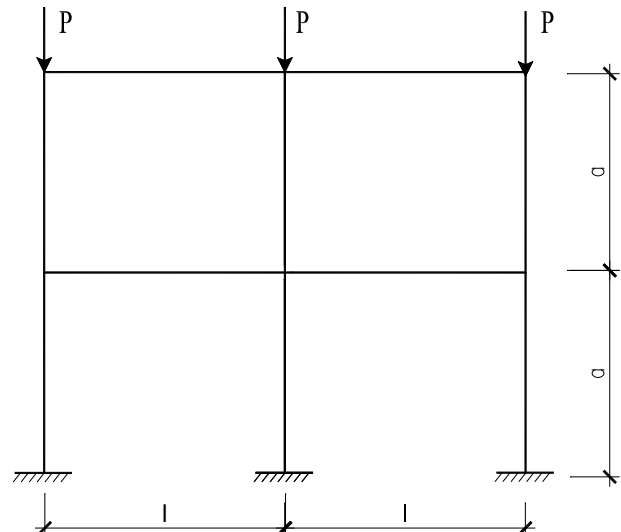
### 2.1. Mô tả bài toán và mô hình phần tử hữu hạn

Trong nghiên cứu này, một hệ khung phẳng hai tầng hai nhịp được lựa chọn làm mô hình điển hình để phân tích ổn định. Hệ kết cấu bao gồm các cột và dầm liên kết cứng với nhau, trong đó các chân cột được giả thiết là liên kết ngàm, còn các nút dầm - cột được coi là liên kết cứng, cho phép truyền mô men uốn.

Tải trọng nén được áp dụng tại các nút trên đỉnh khung và tăng dần theo một hệ số tải nhằm khảo sát quá trình mất ổn định của hệ. Vật liệu được giả thiết làm việc trong miền đàn hồi tuyến tính, trong khi ảnh hưởng của phi tuyến hình học được xét đến thông qua mô hình biến dạng lớn.

Các cấu kiện của khung được giả thiết có tiết diện và vật liệu giống nhau, với tiết diện chữ nhật kích thước 0.10 m x 0.10 m. Vật liệu được giả thiết là thép đàn hồi tuyến tính với mô đun đàn hồi  $E=2,1 \times 10^{11}$  Pa.

Hệ kết cấu được mô hình hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn với các phần tử dạng dầm, cho phép xét đồng thời biến dạng dọc trục và uốn. Ma trận độ cứng tổng thể của hệ được thiết lập thông qua quá trình lắp ráp các phần tử theo nguyên lý cân bằng [8]. Mô hình này cho phép đánh giá trực tiếp sự khác biệt giữa phân tích tuyến tính và phi tuyến đối với cùng một hệ kết cấu.



Hình 1. Mô hình khung 2 tầng 2 nhịp trong phân tích ổn định tuyến tính

### 2.2. Phương pháp phân tích ổn định

Trong phân tích ổn định tuyến tính, bài toán được xây dựng dưới dạng bài toán trị riêng:

$$(K + \lambda K_g) \cdot \varphi = 0 \quad (1)$$

trong đó  $K$  là ma trận độ cứng đàn hồi,  $K_g$  là ma trận độ cứng hình học,  $\lambda$  là hệ số tải trọng tới hạn và  $\varphi$  là dạng mất ổn định tương ứng [9]. Phương pháp này cho phép xác định nhanh tải trọng tới hạn và dạng mất ổn định, nhưng không xét đến ảnh hưởng của biến dạng lớn.

Đối với phân tích phi tuyến, phương trình cân bằng được thiết lập trên cấu hình đã biến dạng của kết cấu và được giải bằng phương pháp lặp [10]. Tải trọng được tăng dần theo từng bước, đồng thời trạng thái cân bằng được cập nhật tương ứng để xác định quan hệ tải trọng - chuyển vị của hệ. Phương pháp này cho phép mô tả đầy đủ quá trình làm việc của kết cấu, bao gồm cả giai đoạn sau mất ổn định và sự xuất hiện của điểm giới hạn.

Các phân tích được thực hiện bằng phần mềm ANSYS APDL, cho phép xây dựng mô hình, điều khiển quá trình tính toán và thu thập kết quả một cách hiệu quả. Việc kết hợp giữa phân tích tuyến tính và phi tuyến giúp làm rõ ảnh hưởng của phi tuyến hình học đến ứng xử ổn định của hệ khung phẳng.

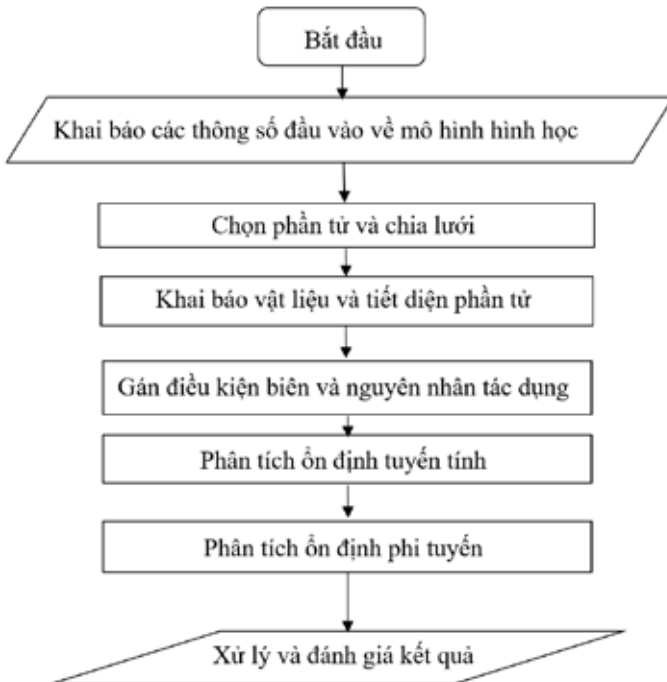
### 2.3. Áp dụng script APDL trong quá trình phân tích

Trong nghiên cứu này, ngoài việc xây dựng mô hình bằng giao diện đồ họa của phần mềm ANSYS, việc phân tích còn được thực hiện thông qua các script APDL (ANSYS Parametric Design Language). APDL cho phép tự động hóa quá trình thiết lập mô hình, thực hiện phân tích và trích xuất kết quả tính toán.

Thông qua việc sử dụng script APDL, toàn bộ quá trình phân tích được thực hiện theo một trình tự xác định, bao gồm việc khai báo phần tử, định nghĩa đặc trưng vật liệu, thiết lập mô hình hình học, gán điều kiện biên và tải trọng cũng như thực hiện quá trình giải bài toán. Ngoài ra, APDL còn cho phép trích xuất các kết quả quan trọng như phản lực nút, chuyển vị của các điểm đặc trưng và các đại lượng cần thiết để xây dựng đường quan hệ tải trọng - chuyển vị của kết cấu.

Việc sử dụng script APDL giúp đảm bảo tính lặp lại của quá trình tính toán, đồng thời tạo điều kiện thuận lợi cho việc thực hiện nhiều trường hợp phân tích khác nhau. Đây cũng là một ưu điểm quan trọng khi nghiên cứu các bài toán ổn định kết cấu, trong đó cần khảo sát ảnh hưởng của nhiều tham số khác nhau đến khả năng ổn định của hệ.

**2.4. Sơ đồ khối bài toán phân tích ổn định**



Hình 2. Sơ đồ khối bài toán phân tích ổn định hệ thanh phẳng bằng phần mềm Ansys

**3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN**

**3.1. Kết quả phân tích ổn định tuyến tính**

Kết quả phân tích cho thấy tải trọng tới hạn thu được từ phương pháp ổn định tuyến tính lớn hơn đáng kể so với kết quả từ phân tích phi tuyến. Điều này là do phương pháp tuyến tính được xây dựng trên giả thiết biến dạng nhỏ và không xét đến sự thay đổi hình học của kết cấu trong quá trình chịu tải.

Trong khi đó, phân tích phi tuyến cho phép xét đến ảnh hưởng của biến dạng lớn và hiệu ứng P-Δ, dẫn đến sự suy giảm độ cứng tổng thể của hệ kết cấu. Do đó, tải trọng tới hạn xác định theo phân tích phi tuyến phản ánh chính xác hơn khả năng chịu lực thực tế của hệ khung.

Sự sai khác giữa hai phương pháp trở nên rõ rệt hơn đối với các hệ kết cấu có độ mảnh lớn, trong đó ảnh hưởng của phi tuyến hình học đóng vai trò chi phối trong quá trình mất ổn định.

Kết quả phân tích ổn định tuyến tính của hệ khung phẳng hai tầng hai nhịp được trình bày trong Bảng 1.

Bảng 1. Hệ số tải trọng tới hạn của hệ khung phẳng hai tầng hai nhịp

Mode dao động	Hệ số ổn định λ
1	2,2823
2	3,9983
3	6,8893
4	11,7085
5	12,5190

Kết quả trong Bảng 1 cho thấy hệ số tải trọng tới hạn của dạng mất ổn định đầu tiên đạt giá trị  $\lambda_1 = 2,2823$ . Đây là dạng mất ổn định chi phối, quyết định khả năng chịu lực của hệ kết cấu. Các dạng mất ổn định bậc cao có giá trị hệ số tải trọng lớn hơn đáng kể, cho thấy ảnh hưởng của chúng đến trạng thái làm việc của kết cấu là không đáng kể trong giai đoạn đầu.

Kết quả này được sử dụng làm cơ sở để so sánh với phân tích phi tuyến trong các phần tiếp theo, nhằm đánh giá mức độ sai khác giữa hai phương pháp và làm rõ ảnh hưởng của phi tuyến hình học đến tải trọng tới hạn của hệ khung.

Do tải trọng tham chiếu được đặt tại đồng thời 3 nút trên đỉnh khung với giá trị  $P=100\text{kN}$  cho mỗi nút, tổng tải trọng tham chiếu của hệ là  $P_{ref}=3 \cdot 100=300\text{kN}$

Khi đó tải trọng tới hạn của hệ khung có thể xác định theo biểu thức:  $P_{cr}=\lambda_1 \cdot P = 2,2823 \times 300=684,69\text{kN}$ . Như vậy, tải trọng tới hạn gây mất ổn định cho hệ khung trong dạng mất ổn định thứ nhất xấp xỉ 684,69 kN.

Quan sát dạng mất ổn định thu được từ ANSYS cho thấy hệ khung có xu hướng uốn ngang tổng thể, trong đó các cột của khung bị cong theo phương ngang. Đây là dạng mất ổn định đặc trưng của các hệ khung chịu tải trọng nén theo phương thẳng đứng. Các dạng mất ổn định bậc cao hơn (mode 2, mode 3, ...) thể hiện những dạng biến dạng phức tạp hơn của hệ khung, tuy nhiên trong thực tế thiết kế, dạng mất ổn định đầu tiên thường được xem là dạng nguy hiểm nhất và được sử dụng để đánh giá khả năng ổn định của kết cấu.

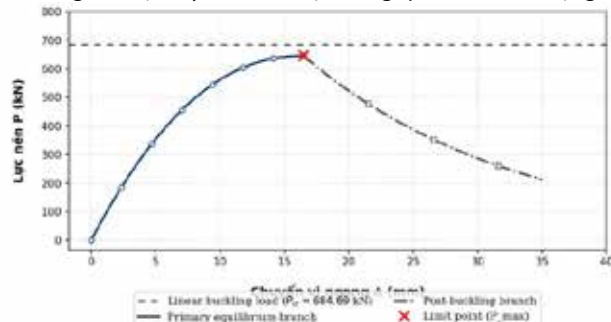
**3.2. Quan hệ tải trọng – chuyển vị và ảnh hưởng của phi tuyến hình học**

Sau khi thực hiện phân tích phi tuyến hình học, khung xuất hiện chuyển vị ngang tổng thể theo phương tác dụng của tải ngang nhỏ. Giá trị chuyển vị ngang tại nút đỉnh giữa tầng dần theo mức tải nên thẳng đứng, phản ánh rõ ảnh hưởng của hiệu ứng P-Δ trong hệ kết cấu.



Hình 3. Sơ đồ biến dạng của khung khi phân tích ổn định phi tuyến bằng Ansys

So với phân tích ổn định tuyến tính, kết quả phi tuyến cho thấy độ cứng tổng thể của hệ giảm dần khi tải trọng tiến gần đến giá trị tới hạn. Trong trường hợp này, trạng thái mất ổn định không còn được biểu diễn chỉ bằng một hệ số tải tới hạn duy nhất, mà được thể hiện thông qua sự phát triển nhanh của chuyển vị ngang khi tải tăng lên. Đồ thị quan hệ giữa tải trọng và chuyển vị ngang của nút đỉnh giữa có thể được sử dụng để đánh giá quá trình tiến gần đến trạng thái mất ổn định của khung. Về mặt bản chất, phân tích phi tuyến hình học cho phép mô tả ứng xử của hệ khung sát thực tế hơn so với phân tích ổn định tuyến tính, bởi vì phương pháp này xét đến ảnh hưởng của sự thay đổi hình học trong quá trình biến dạng.



Hình 4. Đường cân bằng P-Δ của khung 2 tầng 2 nhịp

Hình 4. Đường cân bằng tải - chuyển vị ( $P-\Delta$ ) của khung phẳng 2 tầng 2 nhịp thu được từ phân tích ổn định phi tuyến.

Ứng xử ổn định của hệ khung phẳng hai tầng hai nhịp được mô phỏng chi tiết thông qua đường cân bằng tải trọng – chuyển vị ( $P-\Delta$ ) tại Hình 4. Đồ thị này cung cấp cái nhìn toàn diện về quá trình biến dạng của kết cấu, từ giai đoạn gia tải ban đầu cho đến khi sụp đổ hoàn toàn.

Trong giai đoạn đầu, dưới tác dụng đồng thời của tải trọng nén thẳng đứng và nhiễu ngang, kết cấu làm việc theo nhánh cân bằng chính (primary equilibrium branch). Tại đây, tải trọng  $P$  tăng dần song hành với sự gia tăng của chuyển vị ngang  $\Delta$ . Tuy nhiên, dưới tác động của hiệu ứng phi tuyến hình học và hiệu ứng  $P-\Delta$ , độ cứng tổng thể của hệ khung có xu hướng suy giảm dần. Điều này được thể hiện rõ nét qua độ dốc của đường cân bằng giảm dần khi tải trọng tiến gần đến ngưỡng tới hạn.

Hệ kết cấu chính thức rơi vào trạng thái mất ổn định khi đạt tới điểm giới hạn (limit point), tương ứng với tải trọng cực đại  $P_{max} \approx 645,5$  kN và chuyển vị ngang đỉnh khung đạt 16,5 mm. Khi so sánh với kết quả từ phân tích ổn định tuyến tính ( $P_{cr} \approx 684,69$  kN - biểu diễn bằng đường ngang nét đứt), tải trọng cực đại thực tế thấp hơn khoảng 5,7%. Sự chênh lệch này phản ánh mức độ nhạy cảm của khung đối với sai lệch hình học và biến dạng lớn; đồng thời khẳng định rằng phân tích tuyến tính chỉ đưa ra ngưỡng lý tưởng cho hệ hoàn hảo, trong khi phân tích phi tuyến mô tả sát thực hơn khả năng chịu lực thực tế của công trình.

Sau khi vượt qua điểm giới hạn, đường cân bằng chuyển sang nhánh sau mất ổn định (post-buckling branch). Ở giai đoạn này, hệ khung không còn khả năng duy trì cân bằng: tải trọng mà hệ có thể chịu đựng sụt giảm nhanh chóng trong khi chuyển vị ngang tiếp tục gia tăng mạnh. Đây là minh chứng điển hình cho tính chất sụp đổ không ổn định của hệ khung cao tầng sau khi vượt quá ngưỡng chịu tải cho phép.

Tóm lại, việc kết hợp cả hai phương pháp phân tích cho thấy một cái nhìn toàn diện về ứng xử của công trình: phân tích tuyến tính xác định nhanh giới hạn trên lý thuyết, trong khi phân tích phi tuyến hình học cho phép mô phỏng toàn bộ quá trình từ khi bắt đầu gia tải, đi qua điểm giới hạn cho đến giai đoạn sụp đổ sau mất ổn định. Việc  $P_{max}$  nhỏ hơn  $P_{cr}$  là minh chứng cho tính đúng đắn về mặt cơ học khi xét đến các yếu tố phi tuyến trong bài toán ổn định khung cao tầng.

#### 4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã trình bày phân tích ổn định phi tuyến của hệ khung phẳng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, với việc so sánh giữa phân tích ổn định tuyến tính và phi tuyến hình học. Từ các kết quả thu được, có thể rút ra một số kết luận chính như sau:

- Phân tích ổn định tuyến tính cho phép xác định nhanh tải trọng tới hạn và dạng mất ổn định, tuy nhiên chỉ phản ánh trạng thái tới hạn lý tưởng và không mô tả được quá trình biến dạng của kết cấu.

- Phân tích phi tuyến hình học cho phép mô tả đầy đủ quan hệ tải trọng - chuyển vị ( $P-\Delta$ ), bao gồm cả giai đoạn trước và sau mất ổn định, từ đó phản ánh chính xác hơn ứng xử thực tế của hệ khung.

- Đường cân bằng tải - chuyển vị thể hiện rõ sự suy giảm độ cứng của kết cấu khi tải trọng tăng, đồng thời xác định được điểm giới hạn (limit point), tương ứng với khả năng chịu lực cực đại của hệ.

- Mặc dù tải trọng tới hạn từ phân tích tuyến tính và tải trọng cực đại từ phân tích phi tuyến có ý nghĩa cơ học khác nhau, việc so sánh hai giá trị này vẫn cho phép đánh giá mức độ ảnh hưởng của phi tuyến hình học đến khả năng chịu lực của hệ kết cấu

- Ảnh hưởng của phi tuyến hình học đóng vai trò quan trọng đối với các hệ kết cấu mảnh, trong đó hiệu ứng  $P-\Delta$  có thể chi phối hoàn toàn ứng xử ổn định của kết cấu.

Từ các kết quả trên, có thể khẳng định rằng phân tích phi tuyến là cần thiết để đánh giá chính xác khả năng ổn định của hệ khung phẳng, đặc biệt trong các bài toán thiết kế kết cấu thực tế. Phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với phần mềm ANSYS APDL là công cụ hiệu quả cho việc mô phỏng và phân tích các bài toán ổn định phi tuyến trong kỹ thuật xây dựng.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, 1961.
- [2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [3] Bathe, K.J. Finite Element Procedures. Prentice Hall, 1996.
- [4] Crisfield, M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons, 1991.
- [5] Reddy, J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press, 2004.
- [6] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2014.
- [7] McGuire, W., Gallagher, R.H., Ziemian, R.D. Matrix Structural Analysis. John Wiley & Sons, 2000.
- [8] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, 2002.
- [9] Shaukat, A.R., Wu, Z., Ding, H. In-plane nonlinear postbuckling analysis of circular arches using absolute nodal coordinate formulation and arc-length method. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, Vol. 40, No. 3, pp. 1415-1434, 2021.
- [10] Goriely, A., Vandiver, R., Destrade, M. Nonlinear Euler buckling. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 464, No. 2099, pp. 3003-3019, 2008. doi: 10.1098/rspa.2008.0184.
- [11] Santos, L., Maciel, D.N., Barros, R., Neto, J.A.N., Silva Filho, J.N. Nonlinear analysis of plane frames considering hyperelastic models through the finite element positional method. Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 21, No. 8, e559, 2024. doi: 10.1590/1679-78258158.
- [12] Thai, H.T., Ngo, T.D., Uy, B. A simple beam element for geometrically nonlinear analysis of space frames. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 100, pp. 14-25, 2015.