XÂY DỰNG
TẠP CHÍ ĐIỆN TỬ CỦA BỘ XÂY DỰNG
JOURNAL OF CONSTRUCTION

TẠP CHÍ XÂY DỰNG - eISSN 3030-4482

Một thuật toán động cho bài toán phân tích dẻo kết cấu khung bằng phương pháp trực tiếp

A kinematic algorithm for plastic analysis of frame structures by direct method

➢ **TS Trần Ngọc Trình**
Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội
Email: trinhdhkt@gmail.com

THÔNG TIN BÀI BÁO
Chuyên mục: Khoa học công nghệ
Ngày nhận bài: 14/4/2026
Ngày sửa bài: 27/4/2026
Ngày chấp nhận đăng: 05/5/2026
Ngày xuất bản Online: 21/5/2026
Tác giả liên hệ:
Email: trinhdhkt@gmail.com

TÓM TẮT

Một phương pháp trực tiếp dựa trên định lý động trong phân tích giới hạn được đề xuất nhằm đánh giá tải trọng giới hạn của kết cấu khung chịu tác dụng của tải trọng tĩnh. Các phương pháp phân tích đàn hồi-dẻo gia tăng truyền thống đòi hỏi phải biết chi tiết toàn bộ lịch sử tải và thường có chi phí tính toán lớn, điều này hạn chế khả năng áp dụng đối với các kết cấu phức tạp. Ngược lại, các phương pháp trực tiếp cho phép xác định các tải trọng tới hạn mà không cần theo dõi toàn bộ quá trình gia tải. Trong nghiên cứu này, một công thức cận trên cho phân tích giới hạn của khung được phát triển dựa trên các trường biến dạng dẻo thỏa mãn điều kiện khả dĩ động. Bài toán được xây dựng dưới dạng một bài toán tối ưu có ràng buộc với hàm mục cực tiểu năng lượng tiêu tán dẻo. Kỹ thuật kết hợp giữa hàm phạt và nhân tử Lagrange được sử dụng. Các điều kiện Karush-Kuhn-Tucker tương ứng được giải bằng các vòng lặp Newton. Ví dụ, số cho khung siêu tĩnh chịu tải trọng tập trung dưới dạng tải tỷ lệ được khảo sát chứng minh khả năng hội tụ nhanh, ổn định của thuật toán. Kết quả cho thấy, phương pháp đề xuất là một công cụ hiệu quả và đáng tin cậy cho phân tích giới hạn của kết cấu khung.

Từ khóa: Phân tích dẻo kết cấu; phân tích giới hạn; phương pháp cận trên; phương pháp cận dưới; tối ưu hóa phi tuyến; phương pháp phần tử hữu hạn.

ABSTRACT

A direct method based on the kinematic theorem of limit analysis is proposed to evaluate the limit load of frame structures subjected to static loading. Conventional incremental elastoplastic analysis methods require detailed knowledge of the entire loading history and often involve significant computational cost, which limits their applicability to complex structures. In contrast, direct methods allow the determination of critical load levels without tracing the full loading path. In this study, an upper bound formulation for limit analysis of frame structures is developed using admissible plastic strain fields within a kinematic framework. The problem is formulated as a constrained optimization problem with an objective function defined by the minimization of plastic dissipation energy. A combined penalty-Lagrange multiplier technique is employed and the corresponding Karush-Kuhn-Tucker conditions are solved using Newton iterations. A numerical example of a statically indeterminate frame subjected to concentrated loads under proportional loading is investigated, demonstrating the fast and stable convergence of the proposed algorithm. The results indicate that the proposed method provides an efficient and reliable tool for limit analysis of frame structures.

Keywords: Plastic analysis of structures; limit analysis; upper bound method; nonlinear optimization; finite element method.

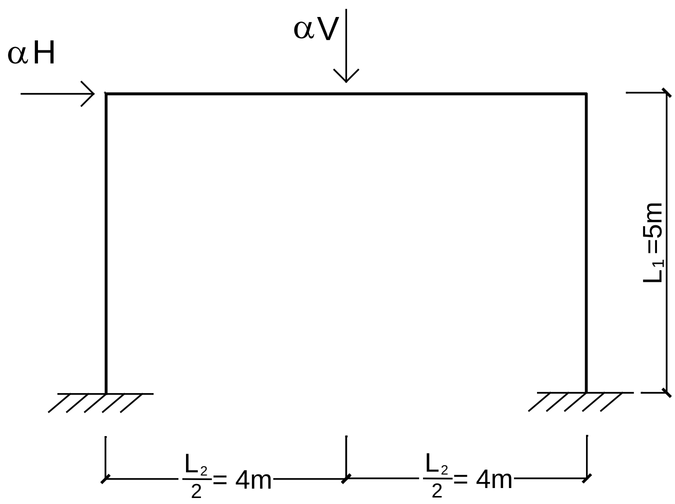
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phân tích giới hạn là một bài toán quan trọng trong kỹ thuật xây dựng và cơ khí, nó là một mô hình toán học mô tả sự phá hoại của các kết cấu đàn hồi-dẻo khi chịu tải trọng tĩnh. Các phương pháp cổ điển để xác định tải trọng tới hạn thường dựa trên phân tích đàn hồi-dẻo gia tăng. Trong các phương pháp này, quá trình gia tải được chia thành các bước nhỏ và sự phát triển của ứng suất và biến dạng được theo dõi cho đến khi kết cấu bị phá hoại [1, 3, 4, 10]. Mặc dù về mặt khái niệm là đơn giản, các phương pháp này đòi hỏi thông tin chi tiết về toàn bộ lịch sử tải và có chi phí tính toán cao, đặc biệt đối với trường hợp tải trọng chu kỳ. Hơn nữa, các khó khăn số như kỳ dị ứng suất, vấn đề hội tụ và ảnh hưởng phụ thuộc đường tải có thể xuất hiện trong các mô phỏng phần tử hữu hạn đàn hồi-dẻo.

Để khắc phục những hạn chế này, các phương pháp trực tiếp cho phân tích giới hạn và phân tích thích nghi đã được phát triển [1, 3, 5, 7]. Các phương pháp này xây dựng bài toán tính tải trọng giới hạn kết cấu thành một bài toán tối ưu toán học và cho phép xác định trực tiếp các hệ số tải trọng giới hạn mà không cần mô phỏng toàn bộ quá trình gia tải [1-10]. Dựa trên các định lý cận trên và cận dưới của lý thuyết dẻo, bài toán phân tích giới hạn được xây dựng dưới dạng một bài toán quy hoạch lồi, có thể là bài toán cực đại hoặc cực tiểu. Đóng góp chính của nghiên cứu này là phát triển một thuật toán dựa trên phương pháp cận trên cho phân tích giới hạn kết cấu khung trong khuôn khổ phần tử hữu hạn liên tục. Công thức được đề xuất kết hợp kỹ thuật hàm phạt (penalty) và nhân tử Lagrange nhằm chuyển bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc thành dạng có thể được giải hiệu quả bằng các vòng lặp Newton. So với các phương pháp trực tiếp hiện có, cách tiếp cận này cung cấp một quy trình số ổn định, có tốc độ hội tụ nhanh và dễ dàng triển khai trong phân tích phần tử hữu hạn.

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH DẺO KHUNG

Xét một kết cấu khung làm từ vật liệu đàn hồi dẻo lý tưởng, chịu hai tải trọng ngang H, V thể hiện ở Hình 1. Các tải trọng này có thể thay đổi theo thời gian với cùng một hệ số tỷ lệ α.



Hình 1. Khung phẳng chịu tải trọng đứng và ngang

Mục tiêu của phân tích giới hạn là tìm cực đại của hệ số α sao cho khung bị phá hoại bởi dòng chảy dẻo. Có hai cách tiếp cận để tìm hệ số tải trọng giới hạn α , phương pháp tĩnh và phương pháp động.

2.1. Phương pháp tĩnh

Phương pháp tĩnh hay còn gọi là phương pháp cận dưới dựa trên định lý cận dưới của phân tích giới hạn, theo đó hệ số an toàn được xác định như là hệ số nhân tải lớn nhất thỏa mãn điều kiện khả dĩ tĩnh. Bài toán này dẫn đến việc giải một bài toán tối ưu phi tuyến dạng cực đại.

$$\alpha_{\lim} = \max \alpha^{-}$$
$$\text{s.t.:} \begin{cases} -\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \alpha^{-}\overline{\mathbf{b}} & \text{in } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \alpha^{-}\overline{\mathbf{t}} & \text{on } S_t \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \le 0 & \text{in } V \end{cases} \tag{1}$$

Các ràng buộc trong (1) lần lượt là các phương trình cân bằng Cauchy, các điều kiện biên tĩnh học và các điều kiện dẻo.

2.2. Phương pháp động

Phương pháp cận trên hay còn gọi là phương pháp động, dựa trên định lý động của phân tích giới hạn [9, 10]. Hệ số tải trọng phá hoại được tính bằng cách giải một bài toán tối ưu cực tiểu có ràng buộc, bài toán được phát biểu như sau:

$$\alpha_{kin} = \min \int_V D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV$$
$$\text{s.t.:} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\nabla \dot{\mathbf{u}}\right)_{sym} & \text{in } V \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{on } S_u \\ \dot{W}_{ex} = \int_V \overline{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}}\, \mathrm{dV} + \int_V \overline{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}}\, \mathrm{dS} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Trong (2), hàm mục tiêu là năng lượng tiêu tán dẻo, các ràng buộc chính là liên hệ giữa tốc độ biến dạng và tốc độ chuyển vị trong khung, các điều kiện biên về chuyển vị và công ngoại lực được chuẩn hóa.

3. THUẬT TOÁN ĐỘNG CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH DẺO KHUNG

3.1. Rời rạc hóa bài toán bằng phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn được sử dụng để rời rạc hóa bài toán (2). Kết cấu khung trong Hình 1 được chia thành các phần tử hữu hạn tứ giác. Nếu sử dụng điều kiện chảy dẻo von Mises, bài toán (2) có dạng rời rạc như sau:

$$\min \sum_{i=1}^{NG} \frac{2}{\sqrt{3}} s_0 \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \varepsilon_0^2}$$
$$s.t. \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \\ \sum_{i=1}^{NG} w_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Trong đó: s_0 là ứng suất chảy của vật liệu; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\dot{\varepsilon}_{11} \;\; \dot{\varepsilon}_{22} \;\; 2\dot{\varepsilon}_{12}\right]^T$ là vector tốc độ biến dạng:

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$; ε_0^2 là một số dương rất nhỏ ($\varepsilon_0^2 \approx 10^{-10}$), ne là số các phần tử tứ giác lưới FEM của khung; NG là số điểm Gauss của mô hình khung.

3.2. Thuật toán để giải bài toán (3)

Để tiện cho tính toán, một vài biến mới được đưa vào như sau:

$\dot{\mathbf{e}}_i = w_i \mathbf{D}^{1/2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$, $\mathbf{t}_i = \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}_i^E$, $\hat{\mathbf{B}} = w_i \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{B}_i$,

$\mathbf{D}^{1/2}$ và $\mathbf{D}^{-1/2}$ là các ma trận đối xứng thỏa mãn:

$\left(\mathbf{D}^{1/2}\right)^{-1} = \mathbf{D}^{-1/2}$ và $\mathbf{D} = \left(\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\right)$.

Thay thế những biến này vào bài toán (3) ta có:

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} s_0 \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{u}} \\ \sum_{i=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{t}_i = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Phương pháp hàm phạt và phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng đồng thời để chuyển bài toán (4) về một bài toán tối ưu không ràng buộc. Hàm Penalty được viết như sau:

$$F_p = \sum_{i=1}^{NG} s_{0i} \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2} + \frac{c}{2}\left(\dot{\mathbf{e}}_i - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}}\right)^T \left(\dot{\mathbf{e}}_i - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}}\right) \tag{5}$$

Ở đây, c là hệ số penalty, $c \gg 1$. Bài toán (4) bây giờ trở thành:

$$\alpha^+ = \min F_p$$
$$\text{s.t.:} \sum_{i=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{t}_i = 1 \tag{6}$$

Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange bài toán (6) được chuyển sang bài toán tối ưu không ràng buộc với hàm Lagrange:

$$L = F_p - \zeta\left[\sum_{i=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{t}_i - 1\right] \tag{7}$$

Trong đó: ζ là nhân tử Lagrange.

Điều kiện tối ưu Karush-Kuhn-Tucker conditions (KKT) cho ta hệ phương trình để tìm lời giải tối ưu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{e}}_i} = \left(s_{0i} \dfrac{\dot{\mathbf{e}}_i}{\sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon^2}} \right) + c\left(\dot{\mathbf{e}}_i - \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{u}}\right) + \alpha \mathbf{t}_i = 0 & (a) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = -c\mathbf{B}_i^T \left(\dot{\mathbf{e}}_i - \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{u}}\right) = 0 & (b) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{NG} \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{t}_i - 1 = 0 & (c) \end{cases} \tag{8}$$

Phương pháp Newton method được áp dụng để giải hệ phương trình phi tuyến (8), chúng ta thu được:

$$\begin{aligned} & d\dot{\mathbf{u}} = d\dot{\mathbf{u}}_1 + \left(\alpha + d\alpha\right) d\dot{\mathbf{u}}_2 \\ & d\dot{\mathbf{e}}_i = \left(d\dot{\mathbf{e}}_i\right)_1 + \left(\alpha + d\alpha\right)\left(d\dot{\mathbf{e}}_i\right)_2 \\ & \alpha + d\alpha = \frac{1 - \sum_{k=1}^{NG} \left(\dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{t}_\mathbf{i}\right) - \sum_{i=1}^{NG} \left(\mathbf{t}_i^T\right)\left(d\mathbf{e}_i\right)_1}{\sum_{i=1}^{NG} \left(\mathbf{t}_i^T\right)\left(d\mathbf{e}_i\right)_2} \end{aligned} \tag{9}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} d\dot{\mathbf{u}}_1 = -\dot{\mathbf{u}} \quad d\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}_{u2} \quad (d\dot{\mathbf{e}}_i)_1 = -\dot{\mathbf{e}}_i \\ (d\dot{\mathbf{e}}_i)_2 = \mathbf{H}_i^{-1}\sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{t}_i + \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{H}_i^{-1}\mathbf{E}_i^{-1}\hat{\mathbf{B}}_i d\dot{\mathbf{u}}_2 - \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{H}_i^{-1}\mathbf{E}_i^{-1}\mathbf{H}_i^{-1}\sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{t}_i \\ \mathbf{H}_i \approx \left(s_{0i}\sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon^2} \right)\mathbf{I}_i \\ \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_i^{-1} \hat{\mathbf{B}}_i \\ \mathbf{f}_{u2} = \sum_{i=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{E}_i^{-1} \mathbf{H}_i^{-1} \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{t}_i \\ \mathbf{E}_i = \left(\dfrac{\mathbf{I}_i}{c} + \sqrt{\dot{\mathbf{e}}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon_0^2}\,\mathbf{H}_i^{-1} \right) \end{cases} \tag{10}$$

Thuật toán chi tiết:

- *Bước 1:* Khởi tạo các vector ban đầu $\dot{\mathbf{u}}^0$ and $\dot{\mathbf{e}}^0$ sao cho điều kiện (8c) thỏa mãn. Đặt các giá trị ban đầu cho các hệ số penalty c và ε_0. Đặt các điều kiện hội tụ, thiết lập số vòng lặp tối đa.

- *Bước 2:* Tính toán $\mathbf{S}$, $\mathbf{f}_{u2}$ từ (10) tại mỗi $\dot{\mathbf{u}}$ và $\dot{\mathbf{e}}$ hiện tại.

- *Bước 3:* Tính toán $(\alpha + d\alpha)$, $d\dot{\mathbf{u}}$, $d\dot{\mathbf{e}}_i$ từ (10).

- *Bước 4:* Tính toán step-size β_k bằng việc giải bài toán phụ:

$$F_p\left(\dot{\mathbf{u}} + \beta_k d\dot{\mathbf{u}},\ \dot{\mathbf{e}} + \beta_k d\dot{\mathbf{e}}\right) \to \min$$

Tính toán tốc độ chuyển vị, tốc độ biến dạng và λ như sau:

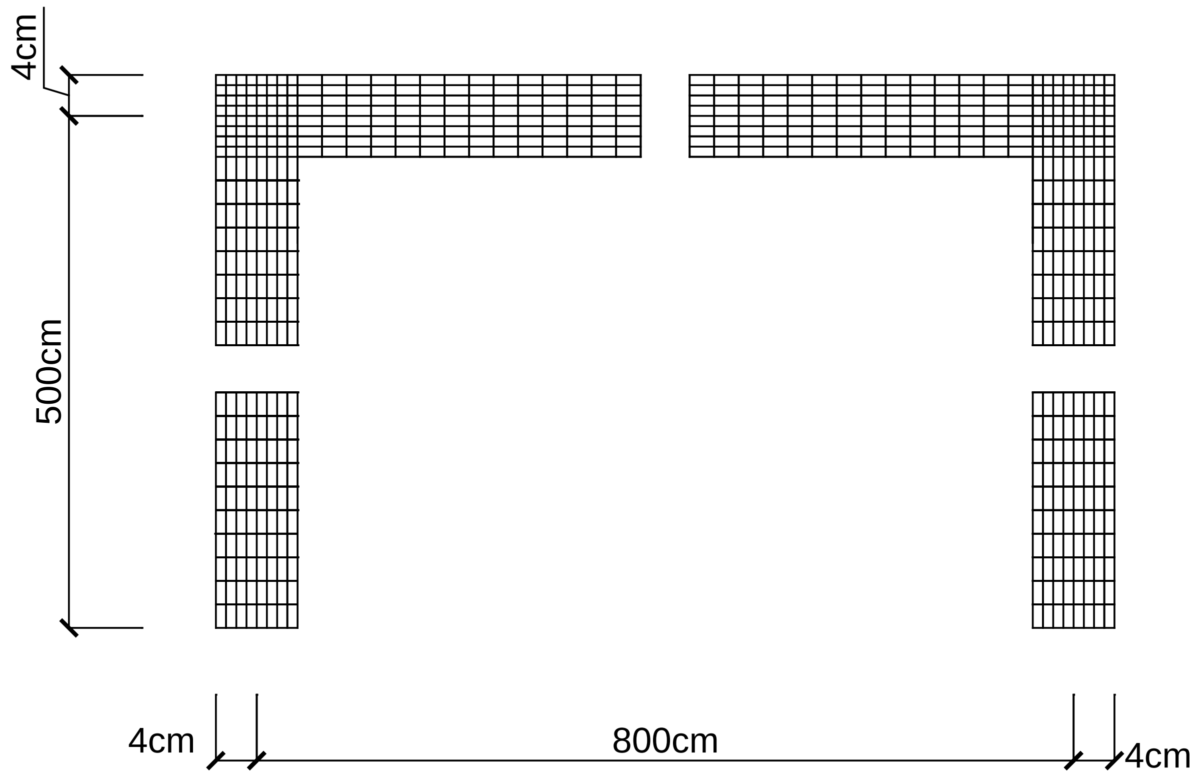
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}} + \beta_k d\dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{e}}_{ik} &= \dot{\mathbf{e}}_{ik} + \beta_k d\dot{\mathbf{e}}_{ik} \\ \alpha &= \alpha + d\alpha \end{aligned}$$

- *Bước 5:* Kiểm tra tiêu chuẩn hội tụ: Nếu tất cả thỏa mãn thì tiến đến bước 6, ngược lại lặp lại các bước 2, 3 và 4.

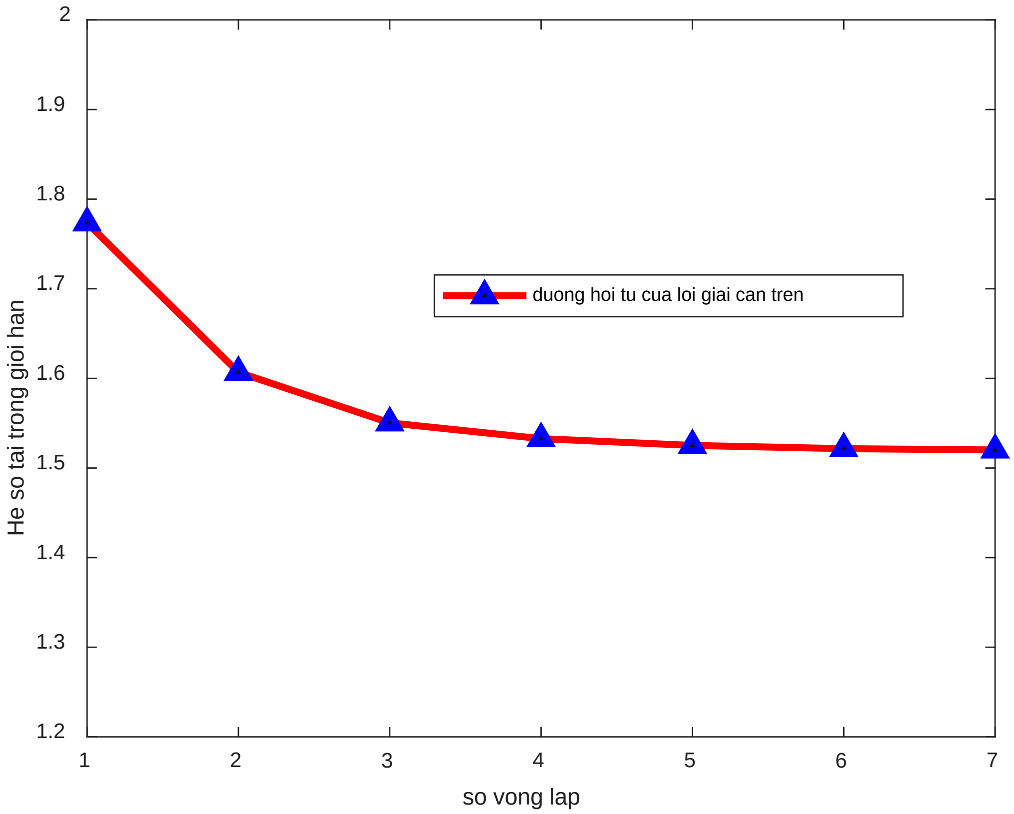
- *Bước 6:* Dừng.

4. VÍ DỤ SỐ

Trong ví dụ này, chúng ta hãy tính toán hệ số tải trọng giới hạn cho khung trong Hình 1. kích thước khung $l_1 = h = 5\ \text{m}$, $l_2 = 2l = 8\ \text{m}$, Tải trọng $H = 4\ kN$, $V = 8\ kN$. Cột và dầm có cùng mô-men chảy dẻo $M_p = 12\ \text{kNm}$. Lời giải giải tích cho bài toán đã cho trong tài liệu [11]. Để có lời giải phần tử hữu hạn, khung được mô hình hóa bằng 592 phần tử tứ giác. Chiều cao tiết diện dầm và khung được chọn sao cho ứng suất chảy được tính với con số $s_i = M_P \cdot 4/\left(bh^2\right) = 12\,\text{kNm} \cdot 4/\left(0{,}01\text{m} \cdot 0{,}8^2\,\text{m}^2\right) = 7500\ k\text{N/m}^2$.



Hình 2. Lưới FEM với 592 phần tử chữ nhật



Hình 3. Đường hội tụ của hệ số tải trọng

Thuật toán nêu trên cho lời giải FEM với kết quả hệ số tải trọng $\alpha = 1{,}385$ sau 7 vòng lặp. Kết quả này nhỏ hơn kết quả của lời giải giải tích $\alpha = 1{,}52$ với mô hình khung (tương tự mô hình dầm Euler).

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này trình bày một phương pháp trực tiếp để tính hệ số tải trọng giới hạn của kết cấu khung làm từ vật liệu đàn dẻo lý tưởng. Công thức được đề xuất dựa trên định lý cận trên và sử dụng các trường biến dạng dẻo tổng khả dĩ trên nền tảng phần tử hữu hạn. Bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc thu được được giải bằng cách kết hợp kỹ thuật hàm phạt và nhân tử Lagrange, đồng thời các điều kiện tối ưu Karush-Kuhn-Tucker được xử lý hiệu quả thông qua các vòng lặp Newton. Một ví dụ số về khung siêu tĩnh chịu tải trọng tập trung dưới dạng tải tỷ lệ đã được khảo sát. Kết quả số cho thấy sự phù hợp tốt với các nghiệm giải tích và các kết quả số, qua đó khẳng định độ chính xác của phương pháp đề xuất. Ngoài ra, thuật toán thể hiện tính ổn định số cao và khả năng hội tụ nhanh, thường chỉ cần một số ít vòng lặp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. Weichert and G. Maier (Eds.). Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads. Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

[2] M. Staat and M. Heitzer. LISA - A European project for FEM-based limit and shakedown analysis. Nuclear Engineering and Design, vol. 206, pp. 151-166, 2001.

[3] J.W. Simon and D. Weichert. Shakedown analysis of engineering structures with limited kinematical hardening. International Journal of Solids and Structures, vol. 49, pp. 2177-2186, 2012.

[4] E. Christiansen. Limit analysis of collapse states. Handbook of Numerical Analysis, vol. 4, pp. 193-312, 1996.

[5] E. Christiansen. Computation of limit loads. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 17, no. 10, pp. 1547-1570, 1981.

[6] V.F. Gaudrat. A Newton type algorithm for plastic limit analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 88, no. 2, pp. 207-224, 1991.

[7] D.K. Vu and M. Staat. Shakedown analysis of structures made of materials with temperature-dependent yield stress. International Journal of Solids and Structures, vol. 44, no. 13, pp. 4524-4540, 2007.

[8] N.T. Tran and M. Staat. Direct plastic structural design under lognormally distributed strength by chance constrained programming. Optimization and Engineering, vol. 21, pp. 131-157, 2021.

[9] W.T. Koiter. General theorems for elastic plastic solids. Progress in Solid Mechanics, pp. 165-221, 1960.

[10] Z.P. Bažant and M. Jirásek. Inelastic Analysis of Structures. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2001.

[11] O. Klingmüller and U. Bourgund. Sicherheit und Risiko im Konstruktiven Ingenieurbau. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, Germany, 1992.